

厦门市 2020~2021 学年度高三年级第一次质量检测

数学试题参考答案

1. C 【解析】本题考查复数的概念、四则运算和几何意义,考查运算求解能力.

因为 $(-1+3i)z=10$, 所以 $z=\frac{10}{-1+3i}=\frac{10(-1-3i)}{10}=-1-3i$, 即复数 z 对应的点位于第三象限.

2. A 【解析】本题考查集合的运算,考查运算求解能力.

因为 $A=\{x|x(x-2)\leq 0\}=\{x|0\leq x\leq 2\}$, $B=\{x|1\leq x\leq 4\}$, 所以 $A\cup B=\{x|0\leq x\leq 4\}$.

3. B 【解析】本题考查常用逻辑用语,考查推理论证能力.

因为 $x^2>4\iff x>2$ 或 $x<-2$, $3^x>9\iff x>2$, 所以前者是后者的必要不充分条件.

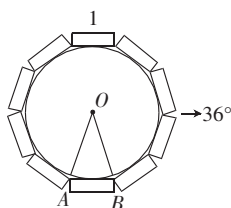
4. A 【解析】本题考查函数的性质,考查运算求解能力.

因为 $f(0)=\log_2 2+t=0$, 所以 $t=-1$, 从而 $f(-6)=-f(6)=-(\log_2 8-1)=-2$.

5. B 【解析】本题考查三角函数的有关知识,考查运算求解能力.

如图, 设 O 为内切圆的圆心, r 为内切圆的半径, 由 $\angle AOB=36^\circ$, $AB=1$, $\tan \frac{\angle AOB}{2} =$

$\frac{AB}{2r}$, 得 $\tan 18^\circ = \frac{1}{2r}$, 解得 $r = \frac{1}{2\tan 18^\circ}$.



6. B 【解析】本题考查概率统计的有关知识,考查数据处理能力.

因为 ξ (单位: 千元) 服从正态分布 $N(2, 1)$, 所以 $\mu=2$, $\sigma=1$, 则 $P(0<\xi\leq 3) = \frac{1}{2}P(\mu-$

$\sigma<\xi\leq \mu+\sigma) + \frac{1}{2}P(\mu-2\sigma<\xi\leq \mu+2\sigma) = \frac{1}{2}(0.6827+0.9545) = 0.8186$.

7. D 【解析】本题考查三角函数的图象及性质,考查运算求解能力.

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 由题图可知 $\frac{T}{2} = \frac{11\pi}{12} - \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$, 所以 $T = \frac{2\pi}{3}$, $\omega=3$. 当 $x = \frac{7\pi}{12}$ 时, $y=0$, 即 $3 \times \frac{7\pi}{12}$

$+\varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 所以 $\varphi = 2k\pi - \frac{9\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$. 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $k=1$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, 所以 $f(x) = A\cos(3x -$

$\frac{\pi}{4})$. 又 $f(\frac{\pi}{2}) = A\cos(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = -1$, 所以 $A = \sqrt{2}$, $f(x) = \sqrt{2}\cos(3x - \frac{\pi}{4})$, 从而 $g(x) = -\sqrt{2}\sin 3x$. 当 $x \in$

$[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$ 时, $3x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$, 所以 $\sin 3x \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$, 得 $g(x) = -\sqrt{2}\sin 3x \in [-\sqrt{2}, 1]$, D 正确.

8. C 【解析】本题考查双曲线的离心率、点到直线的距离公式,考查了化归与转化、数学运算等核心素养.

如图, 由已知 $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MO} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MP}$, 得 $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OQ}$, 由圆 $M: (x-a)^2 + y^2 =$

b^2 , 得 $M(a, 0)$ 为双曲线 C 的右顶点. 过点 M 作 $MN \perp PQ$, 垂足为 N , 则点

$M(a, 0)$ 到渐近线 $bx - ay = 0$ 的距离 $|MN| = \frac{ab}{c}$. 因为圆 M 的半径为 b , 所以

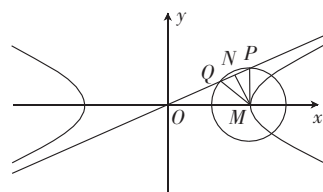
$|NQ| = \sqrt{b^2 - \frac{a^2 b^2}{c^2}} = \frac{b^2}{c}$. 由 $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OQ}$, 可得 $|ON| = 5|NQ| = \frac{5b^2}{c}$. 又因为 $|OM| = a$, 所以 $a^2 = \frac{25b^4}{c^2} + \frac{a^2 b^2}{c^2}$,

整理得 $a^2(c^2 - b^2) = 25b^4$, 所以 $a^2 = 5b^2 = 5c^2 - 5a^2$, 即 $6a^2 = 5c^2$, $\sqrt{6}a = \sqrt{5}c$, 故双曲线的离心率为 $\frac{\sqrt{30}}{5}$.

9. BD 【解析】本题考查平面向量的位置关系及向量的夹角与模,考查运算求解能力.

因为 $a \parallel b$, 所以 $3m = -8$, 解得 $m = -\frac{8}{3}$, A 错误; 因为 $a \perp b$, 所以 $-4m + 6 = 0$, 解得 $m = \frac{3}{2}$, C 错误; 若 $m =$

0, 则 $a = (0, 2)$, $b = (-4, 3)$, $\cos \langle a, b \rangle = \frac{6}{2 \times 5} = \frac{3}{5}$, $\sin \langle a, b \rangle = \frac{4}{5}$, B 正确; 因为 $a + b = (m - 4, 5)$, 所以



$\sqrt{(m-4)^2+5^2}=13$, 解得 $m=-8$ 或 16 , D 正确.

10. AD 【解析】本题考查函数的应用以及数学建模, 考查运算求解能力和应用意识.

把点 M 的坐标代入 $y=(\frac{1}{2})^{t-a}$, 得 $(\frac{1}{2})^{1-a}=4$, 解得 $a=3$, A 正确; 易知当 $0 \leq t < 1$ 时, $y=4t, 4 \times \frac{1}{8}=0.5$,

C 错误; 由于 $y=\begin{cases} 4t, 0 \leq t < 1, \\ (\frac{1}{2})^{t-3}, t \geq 1, \end{cases}$ 令 $y \geq 0.125 = \frac{1}{8}$, 得 $\begin{cases} 0 \leq t < 1, \\ 4t \geq \frac{1}{8}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} t \geq 1, \\ (\frac{1}{2})^{t-3} \geq \frac{1}{8}, \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{32} \leq t \leq 6, 6 - \frac{1}{32} =$

$5\frac{31}{32}$, 所以注射一次该药物治疗该病的有效时间长度为 $5\frac{31}{32}$ 小时, B 错误, D 正确.

11. ABD 【解析】本题考查逻辑推理, 考查推理论证能力.

根据题意, 第 i 行的等差数列的公差为 $2i+1$, 第 j 列的等差数列的公差等于 $2j+1$, 设 $a_{i \times j} (i, j \in \mathbf{N}^*)$ 表示第 i 行第 j 列的数, 因为第 4 行的数构成了以 13 为首项, 9 为公差的等差数列, 所以 $a_{4 \times 10} = 13 + 9 \times 9 = 94$, A 正确; 因为第 7 行的第 1 个数为 22, 第 2 个数为 37, 所以公差为 15, B 正确; 按照题意, 如果 592 不会出现在此矩阵中, 则 $2 \times 592 + 1 = 1185$ 是素数, 而 $1185 = 5 \times 237$ 是合数, 所以 592 会出现在此矩阵中, C 错误; 第 10 列中前 10 行的数构成以 $a_{1 \times 10} = 4 + 3 \times 9 = 31$ 为首项, 公差为 21 的等差数列, 其和为 $10 \times 31 + \frac{10 \times 9 \times 21}{2} = 1255$, D 正确.

12. CD 【解析】本题考查函数与导数的综合应用, 考查推理论证能力.

因为 $f'(x) = \frac{2-2\ln(-x)}{x^2} (x < 0)$, 易求 $f(x)$ 的极小值为 $f(-e) = -\frac{2}{e}$, 且

$f(x)$ 在 $(-\infty, -e)$ 上单调递减, 在 $(-e, 0)$ 上单调递增, 其大致图象如图所示.

令 $g(x) + \frac{1}{m} = 0$, 即 $3x^2 + mx - 2m^2 = 0$, 解得 $x = -m$ 或 $x = \frac{2m}{3}$, 函数 $h(x)$ 的

零点即方程 $f(x) = -m$ 和 $f(x) = \frac{2m}{3}$ 的根.

所以函数 $h(x)$ 有 3 个不同的零点需满足:

当 $m < 0$ 时, $f(x_1) = f(x_2) = \frac{2m}{3} \in (-\frac{2}{e}, 0)$, 且 $f(x_3) = -m \in (0, +\infty)$,

所以 $f(x_1) + f(x_2) + 2f(x_3) = \frac{2m}{3} + \frac{2m}{3} + 2(-m) = -\frac{2m}{3} \in (0, \frac{2}{e})$;

当 $m > 0$ 时, $f(x_1) = f(x_2) = -m \in (-\frac{2}{e}, 0)$, 且 $f(x_3) = \frac{2m}{3} \in (0, +\infty)$,

所以 $f(x_1) + f(x_2) + 2f(x_3) = (-m) + (-m) + \frac{4m}{3} = -\frac{2m}{3} \in (-\frac{4}{3e}, 0)$.

综上, $f(x_1) + f(x_2) + 2f(x_3)$ 的取值范围为 $(-\frac{4}{3e}, 0) \cup (0, \frac{2}{e})$.

由于 $-\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \in (-\frac{4}{3e}, 0) \cup (0, \frac{2}{e})$, 所以选 CD.

13. $\frac{25}{2}$ 【解析】本题考查均值不等式, 考查运算求解能力.

因为 $\frac{4}{a} + \frac{3}{b} = \frac{1}{2}(a+3b)(\frac{4}{a} + \frac{3}{b}) = \frac{1}{2}(13 + \frac{12b}{a} + \frac{3a}{b})$, $\frac{12b}{a} + \frac{3a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{12b}{a} \cdot \frac{3a}{b}} = 12$, 所以 $\frac{4}{a} + \frac{3}{b} \geq \frac{25}{2}$.

14. 420 【解析】本题考查排列组合问题, 考查数据处理能力和应用意识.

因为去甲学校的人员安排有 C_8^2 种不同的方法, 去乙学校的人员安排有 C_6^2 种不同的方法, 剩下的 4 人安排去丙学校有 C_4^4 种方法, 所以不同的安排方法共有 $C_8^2 C_6^2 C_4^4 = 420$ 种.

15. -83 【解析】本题考查直线与抛物线的位置关系, 考查运算求解能力.

联立方程组 $\begin{cases} x = -y - 4, \\ y^2 = -12x, \end{cases}$ 消去 x 得 $y^2 - 12y - 48 = 0$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = 12, y_1 y_2 = -48$.

因为抛物线的焦点为 $F(-3,0)$, 所以 $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = (x_1+3)(x_2+3) + y_1 y_2$
 $= (-y_1-1)(-y_2-1) + y_1 y_2 = 2y_1 y_2 + (y_1 + y_2) + 1 = -96 + 12 + 1 = -83$.

16. $2\sqrt{2}, 24\pi$ 【解析】本题考查几何体的结构特征、球的表面积运算, 考查空间想象能力、运算求解能力, 体现了直观想象和数学运算等核心素养.

如图, 设 $AB=2x$, 则 $AM=MB=MN=x$. 在 $\triangle BMD$ 和 $\triangle AMD$ 中, 由余弦定理和诱导

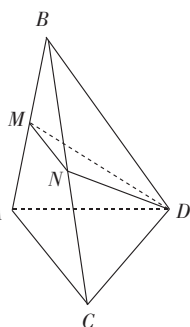
公式, 得 $\frac{BM^2 + MD^2 - BD^2}{2BM \cdot MD} = -\frac{MA^2 + MD^2 - AD^2}{2MA \cdot MD}$, 即 $x^2 + MD^2 - 16 = -x^2 - MD^2 +$

$4x^2$, 解得 $MD^2 = x^2 + 8$. 因为 $\triangle BCD$ 是边长为 4 的等边三角形, 所以 $DN=2\sqrt{3}$. 又 $DM \perp MN$, 所以 $MD^2 + MN^2 = DN^2$, 即 $x^2 + x^2 + 8 = 12$, 解得 $x=\sqrt{2}$, 从而 $AB=AC=AD$

$=2\sqrt{2}$. 又 $BC=CD=BD=4$, 所以 $AB \perp AC, AB \perp AD, AC \perp AD$, 易知三棱锥 $A-BCD$

与棱长为 $2\sqrt{2}$ 的正方体有相同的外接球 O , 外接球的直径 $2R = \sqrt{3 \times (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6}$, 即

$R=\sqrt{6}$, 所以球 O 的表面积是 $4\pi R^2 = 24\pi$.



17. 解: 选①

因为 $\sqrt{S_{n+1}} = \sqrt{S_n} + 1, a_1 = 1$,

所以 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列. 1 分

则 $\sqrt{S_n} = 1 + (n-1) \times 1 = n$, 从而 $S_n = n^2$ 2 分

当 $n > 1$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$ 4 分

经检验, 当 $n=1$ 时, $a_1 = 1$ 也符合上式, 所以 $a_n = 2n-1$ 5 分

因为 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$, 6 分

所以 $b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$ 8 分

由 $\frac{n}{2n+1} > \frac{9}{19}$, 解得 $n > 9$, 9 分

所以使原不等式成立的最小正整数为 10. 10 分

选②

因为 $\sqrt{4S_n - 1}$ 是 $2n+1$ 与 a_n 的等比中项, 所以 $4S_n - 1 = (2n+1)a_n$, 1 分

当 $n > 1$ 时, $\begin{cases} 4S_n = (2n+1)a_n + 1, \\ 4S_{n-1} = (2n-1)a_{n-1} + 1, \end{cases}$ 两式相减得 $4a_n = (2n+1)a_n - (2n-1)a_{n-1}$, 整理得 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n-1}{2n-3}, \dots$

..... 3 分

所以 $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdot \dots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = 2n-1 (n \geq 2)$, 4 分

经检验, $a_1 = 1$ 也符合上式, 所以 $a_n = 2n-1$ 5 分

因为 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$, 6 分

所以 $b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$ 8 分

由 $\frac{n}{2n+1} > \frac{9}{19}$, 解得 $n > 9$, 9 分

所以使原不等式成立的最小正整数为 10. 10 分

选③

由题设可得 $\begin{cases} 4S_n = (1+a_n)^2, \\ 4S_{n-1} = (1+a_{n-1})^2 (n \geq 2), \end{cases}$ 两式相减得 $4a_n = (1+a_n)^2 - (1+a_{n-1})^2 (n \geq 2)$, 1 分

进一步整理得 $(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 2) = 0$ 3 分

因为 $a_n > 0$, 所以 $a_n - a_{n-1} = 2 (n \geq 2)$,

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列, 4 分

所以 $a_n = 2n - 1$ 5 分

因为 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$, 6 分

所以 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$ 8 分

由 $\frac{n}{2n+1} > \frac{9}{19}$, 解得 $n > 9$, 9 分

所以使原不等式成立的最小正整数为 10. 10 分

18. 解: 因为 $\sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin A \sin B \sin C$,

所以 $b^2 + c^2 = a^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} bc \sin A$, 2 分

又 $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$, 所以 $2bc \cos A = \frac{2\sqrt{3}}{3} bc \sin A$,

化简为 $\sin A = \sqrt{3} \cos A$, 即 $\tan A = \sqrt{3}$ 4 分

因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 5 分

(1) 因为 $S = \frac{1}{2} bc \sin A = 3$, $b = \sqrt{3}c$, 所以 $\frac{1}{2} c \cdot \sqrt{3} c \sin \frac{\pi}{3} = 3$,

解得 $c = 2$, 从而 $b = 2\sqrt{3}$ 7 分

(2) 因为 $A + B + C = \pi$, 所以 $B + C = \frac{2\pi}{3}$,

所以 $\sin B + \sin C = \sin \left(\frac{2\pi}{3} - C \right) + \sin C = \sqrt{3} \sin \left(C + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 9 分

解得 $\sin \left(C + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 10 分

又 $0 < C < \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\frac{\pi}{6} < C + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$,

所以 $C + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$, 或 $C + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4}$, 11 分

解得 $C = \frac{\pi}{12}$ 或 $C = \frac{7\pi}{12}$ 12 分

19. 解: (1) 由条件知 $\frac{x}{90+x} = \frac{4}{13}$, 解得 $x = 40$, 1 分

所以 $y = 130$, $z = 40$, $w = 70$, 2 分

$K^2 = \frac{200 \times (90 \times 40 - 30 \times 40)^2}{130 \times 70 \times 120 \times 80} = \frac{1200}{13 \times 7} \approx 13.187 > 10.828$, 4 分

所以有 99.9% 的把握认为“学生取得的成绩情况”与“家长对学生的教育重视程度”有关. 5 分

(2) 从成绩优秀的选手中按照分层抽样的方法抽取 20 人, 则“家长高度重视学生教育”的应抽取 15 人, “家长重视学生教育度一般”的应抽取 5 人. 6 分

由题意, X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3.

$P(X=0) = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{1}{114}$, 7 分

$P(X=1) = \frac{C_{15}^1 C_5^2}{C_{20}^3} = \frac{5}{38}$, 8 分

$P(X=2) = \frac{C_{15}^2 C_5^1}{C_{20}^3} = \frac{35}{76}$, 9 分

$P(X=3)=\frac{C_{15}^3}{C_{20}^3}=\frac{91}{228}$ 10 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{114}$	$\frac{5}{38}$	$\frac{35}{76}$	$\frac{91}{228}$

..... 11 分

数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{114}+1\times\frac{5}{38}+2\times\frac{35}{76}+3\times\frac{91}{228}=\frac{513}{228}=\frac{9}{4}$ 12 分

20. (1)证明;因为 $AD\parallel BC, AB\perp BC$,所以 $AB\perp AD$ 1 分

因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB,AD\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $AD\perp$ 平面 PAB 2 分

又 $PA\subset$ 平面 PAB ,所以 $AD\perp PA$ 3 分

同理可证 $AB\perp PA$ 4 分

因为 $AB\cap AD=A$,所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$ 5 分

(2)解;设 $AD=1$,则 $AB=\sqrt{3}$,

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $BC=\frac{AB}{\tan 30^{\circ}}=3$ 6 分

由(1)知 AB,AD,AP 两两垂直,以 A 为原点,分别以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$,

则有 $A(0,0,0),B(\sqrt{3},0,0),C(\sqrt{3},3,0),D(0,1,0)$.

设 $P(0,0,t)(t>0)$,则 $\overrightarrow{PC}=(\sqrt{3},3,-t),\overrightarrow{PB}=(\sqrt{3},0,-t),$

$\overrightarrow{DB}=(\sqrt{3},-1,0)$ 7 分

设直线 PC 与平面 PBD 所成的角为 θ ,平面 PBD 的法向量为 $m=(x,y,z)$,则 $\begin{cases} m\cdot\overrightarrow{PB}=0, \\ m\cdot\overrightarrow{DB}=0, \end{cases}$ 即

$\begin{cases} \sqrt{3}x-tz=0, \\ \sqrt{3}x-y=0, \end{cases}$ 令 $x=t$,得 $m=(t,\sqrt{3}t,\sqrt{3})$, 8 分

所以 $\sin \theta=\frac{|\overrightarrow{PC}\cdot m|}{|\overrightarrow{PC}|\cdot|m|}=\frac{3\sqrt{3}t}{\sqrt{12+t^2}\cdot\sqrt{3+4t^2}}=\frac{3\sqrt{3}t}{\sqrt{4t^4+51t^2+36}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{4t^2+\frac{36}{t^2}+51}}.$

因为 $4t^2+\frac{36}{t^2}+51\geqslant2\sqrt{4\times36}+51=75$,所以 $\sin \theta\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{75}}=\frac{3}{5}$,当且仅当 $4t^2=\frac{36}{t^2}$,即 $t=\sqrt{3}$ 时取等号. 因为

$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$,函数 $y=\sin \theta$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增,所以当 $t=\sqrt{3}$ 时, $\sin \theta$ 最大,即 θ 最大,..... 10 分

此时平面 PBD 的法向量 $m=(\sqrt{3},3,\sqrt{3})$,而平面 BCD 的一个法向量 $n=(0,0,1)$,

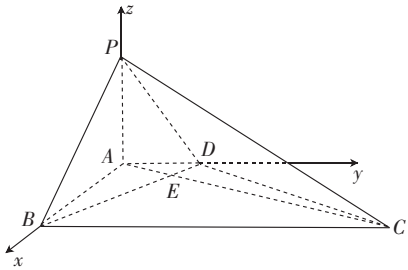
所以 $\cos\langle m,n\rangle=\frac{m\cdot n}{|m|\cdot|n|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 11 分

因为二面角 $P-BD-C$ 为钝角,所以它的余弦值为 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ 12 分

21. (1)解;因为 $|F_1F_2|=4=2c$,所以 $c=2$, 1 分

所以 $a^2-b^2=4$,又 $a=\sqrt{2}b>0$,所以 $a^2=8,b^2=4$,..... 3 分

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 4 分



(2)证明:由题意可知直线 AB 的斜率存在, $F_2(2,0)$, 设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ y = kx + m, \end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 8 = 0, \dots\dots\dots 5$ 分

则 $\Delta = 16k^2m^2 - 4(1+2k^2)(2m^2 - 8) = 64k^2 - 8m^2 + 32 > 0, \dots\dots\dots 6$ 分

且 $x_1 + x_2 = -\frac{4km}{1+2k^2}, x_1x_2 = \frac{2m^2 - 8}{1+2k^2}. \dots\dots\dots 7$ 分

设直线 F_2A, F_2B 的倾斜角分别为 α, β , 则 $\alpha = \pi - \beta, k_{F_2A} + k_{F_2B} = \frac{y_1}{x_1 - 2} + \frac{y_2}{x_2 - 2} = 0, \dots\dots\dots 8$ 分

所以 $y_1(x_2 - 2) + y_2(x_1 - 2) = 0$, 即 $(kx_1 + m)(x_2 - 2) + (kx_2 + m)(x_1 - 2) = 0, \dots\dots\dots 9$ 分

所以 $2kx_1x_2 + (m - 2k)(x_1 + x_2) - 4m = 0,$

所以 $2k \times \frac{2m^2 - 8}{1+2k^2} + (2k - m) \times \frac{4km}{1+2k^2} - 4m = 0, \dots\dots\dots 10$ 分

化简可得 $m = -4k, \dots\dots\dots 11$ 分

所以直线 AB 的方程为 $y = kx - 4k = k(x - 4)$, 故直线 AB 过定点 $(4, 0).$ $\dots\dots\dots 12$ 分

22. (1)解: $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty), f'(x) = -\frac{a}{x^2} - \frac{1}{x} = -\frac{a+x}{x^2}. \dots\dots\dots 1$ 分

当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减. $\dots\dots\dots 2$ 分

当 $a < 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < -a$; 由 $f'(x) < 0$, 得 $x > -a$. 所以 $f(x)$ 在区间 $(0, -a)$ 上单调递增, 在区间 $(-a, +\infty)$ 上单调递减.

综上所述, 若 $a \geq 0, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; 若 $a < 0, f(x)$ 在 $(0, -a)$ 上单调递增, 在 $(-a, +\infty)$ 上单调递减. $\dots\dots\dots 4$ 分

(2)证明: 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln x = \frac{1 - x - x \ln x}{x}.$

令 $g(x) = 1 - x - x \ln x$, 则 $g'(x) = -2 - \ln x. \dots\dots\dots 5$ 分

当 $x \in (0, e^{-2})$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增;

当 $x \in (e^{-2}, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减.

所以 $g(x)_{\max} = g(e^{-2}) = 1 + e^{-2}$, 即 $1 - x - x \ln x \leq 1 + e^{-2}. \dots\dots\dots 7$ 分

令 $h(x) = \ln(x+1) - x, x > 0$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1} < 0,$

可知 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $\dots\dots\dots 9$ 分

所以 $h(x) < h(0) = 0$, 即当 $x > 0$ 时, $0 < \ln(x+1) < x$, 从而 $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{\ln(x+1)}. \dots\dots\dots 10$ 分

所以当 $x > 0$ 时, $\frac{1 - x - x \ln x}{x} \leq \frac{1 + e^{-2}}{x} < \frac{1 + e^{-2}}{\ln(x+1)}$, 即 $f(x) < \frac{1 + e^{-2}}{\ln(x+1)}, \dots\dots\dots 11$ 分

所以 $\ln(x+1) \cdot f(x) < 1 + e^{-2}. \dots\dots\dots 12$ 分